Е. Л. Авербух, О. Е. Куркина, А. А. Куркин

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,

averbukh.lena@gmail.com

ДИНАМИКА ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ЗАХВАЧЕННЫХ ВОЛН В ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЕ ОКЕАНА С УЧЕТОМ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ И ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

В динамике волн прибрежной зоны океана заметную роль играют захваченные волны (краевые, шельфовые, Кельвина и пр.) – тип длинноволновых движений, локализованных в прибрежной зоне, а также в областях с вытянутыми и достаточно сильными и резкими неоднородностями рельефа дна. На волны этого класса вблизи берега приходится 95 – 98% энергии.

Интерес именно к краевым волнам велик, прежде всего, по причине их чрезвычайно большого значения для различных природных явлений. Согласно современному представлению, краевые волны играют важную роль в формировании береговой линии и прибрежного рельефа.

Уравнения движения и неразрывности в рамках линейной теории мелкой воды имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(h(y)u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h(y)v\right) = 0,$$

где $\eta(x, y, t)$ – смещение водной поверхности, u и v – вдольбереговая и поперечная компоненты горизонтальной скорости течения, $h(y)$ – профиль рельефа дна на цилиндрическом шельфе, y – координата, перпендикулярная линии берега, x

– вдольбереговая координата, g – ускорение свободного падения. В рамках линейной теории краевая задача для структуры моды F принимает вид

$$\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{1}{h}\frac{dh}{dy}\frac{dF}{dy}+\left(\frac{\omega^2}{gh}-k^2\right)F=0,$$

где ω – частота, определяемая дисперсионным соотношением, k – волновое число. В качестве граничных условий на берегу ($y = 0$) ставилось условие непротекания, означающее отсутствие потока массы через береговую границу, а на бесконечности – стремление структуры моды к нулю для захваченных волн.

Данная работа посвящена аналитическому исследованию и поиску точного решения для ступенчатого шельфа с учетом вращения Земли и вдольберегового сдвигового течения. Дифференциальное уравнение с учетом данных эффектов имеет вид

$$\frac{d^2F}{dy^2}+\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{dy}-\frac{2}{\sigma}\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{dF}{dy}+\left(\frac{\sigma^2}{gh}-\frac{f^2}{gh}-\frac{fk}{\omega}\frac{1}{h}\frac{dh}{dy}-k^2\right)F=0,$$

где $\sigma(y)=\omega-V_0(y)k$, V_0 – постоянная скорость течения, $f = 2\Omega\sin\varphi$ – инерционная частота, Ω – частота вращения Земли, φ – географическая широта (для средних широт $f = 10^{-4}$ рад/с).

Проанализировано решение краевой задачи, построены дисперсионные диаграммы и поперечная к берегу структура краевых волн для различных волновых мод. Проведен анализ влияния вдольберегового течения на характеристики линейных краевых волн. Продемонстрирован доплеровский сдвиг частот для различных волновых мод при различных значениях числа Фруда. Показано, что суперпозиция краевых волн представляет собой узкий импульс, вся энергия которого сосредоточена около берега и не передается в открытый океан, однако учет вдольберегового течения во вращающемся океане вносит асимметрию и изменяет структуру мод краевых волн, в результате чего максимумы могут располагаться вне линии уреза на мелководной части ступеньки. Необходимо отметить, что влияние вращения Земли на средних широтах на динамику топографических захваченных волн мало.

Представленные результаты получены в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы, а также при поддержке грантов Президента РФ для молодых российских ученых – докторов наук (МД-99.2010.5) и РФФИ 10-05-00199а.

Ю. Р. Агачев, Р. К. Губайдуллина, А. А. Валиуллина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

jagachev@ksu.ru, grenata@mail.ru

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К НУЛЮ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ, ЗАДАВАЕМОЙ ИНТЕГРАЛОМ С ПОЛЯРНЫМ ЯДРОМ

Пусть $\Omega \subset R_n, n \in N$, – произвольно фиксированное ограниченное множество. Рассмотрим интеграл с полярным ядром

$$v(x) \equiv \int\limits_{\Omega} \frac{h(x,y)u(y)}{r^{\alpha}(x,y)}dy, \quad 0 < \alpha < n, \ x \in \Omega, \tag{1}$$

где функция $h(x,y)$ ограничена на $\Omega \otimes \Omega$, а $r(x,y)$ означает евклидово расстояние между точками $x, y \in \Omega$.

В работе изучаются структурные свойства функции $v(x)$ в терминах модуля непрерывности в двух случаях, когда плотность $u(y)$ в интеграле (1) есть функция, непрерывная и квадратично-суммируемая в области Ω. Модуль непрерывности функции $v(x) \in C(\Omega)$ задается формулой

$$\omega(v;\delta) = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ r(x,y)\leqslant\delta}} |v(x)-v(y)|, \quad 0<\delta\leqslant \operatorname{diam}\Omega.$$

В случае плотности из пространства $L_2(\Omega)$ мы будем исследовать интегральный модуль непрерывности функции $v(x)$, который вводится по формуле

$$\omega(v;\delta)_2 = \sup_{r(y,0)\leqslant\delta} \sqrt{\int_\Omega |v(x+y)-v(x)|^2dx}\,, \quad 0<\delta\leqslant \operatorname{diam}\Omega.$$

Свойства интеграла с полярным ядром (1) подробно изучены С.Г. Михлиным. Он показал (см., напр., [1]), что интеграл (1) задает в пространствах непрерывных и квадратично-суммируемых на Ω функций вполне непрерывный оператор. Отсюда и из критериев компактности в пространствах $C(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ (см., напр., [2]) вытекает, что

$$\omega(v;\delta)\to 0, \quad \delta\to 0,\ \forall u\in C(\Omega), \|u\|_\infty\leqslant c_1;$$

$$\omega(v;\delta)_2\to 0, \quad \delta\to 0,\ \forall u\in L_2(\Omega), \|u\|_2\leqslant c_2.$$

Здесь (и далее) $c_1, c_2, \ldots$ – абсолютные положительные постоянные. В частных случаях задания плотности скорость сходимости к нулю модуля непрерывности функции $v(x)$ вытекает из принадлежности этой функции классу Гельдера.

Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть ограниченная на* $\Omega \otimes \Omega$ *функция* $h(x, y)$ *непрерывна по переменной* x, $u(y) \in C(\Omega)$. *Тогда для модуля непрерывности функции* $v(x) \in C(\Omega)$ *верна оценка*

$$\omega(v; \delta) \leqslant c_3\{\omega_x(h; \delta) + \delta^{n-\alpha}\} \cdot \|u\|_\infty, \quad 0 < \alpha < n, \ \delta \leqslant \operatorname{diam} \Omega, \tag{3}$$

где $\omega_x(h; \delta)$ — *частный модуль непрерывности функции* $h(x, y)$ *по переменной* x:

$$\omega_x(h; \delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2, y \in \Omega \\ r(x_1, x_2) \leqslant \delta}} |h(x_1, y) - h(x_2, y)|.$$

Теорема 2. *Пусть ограниченная на* $\Omega \otimes \Omega$ *функция* $h(x, y)$ *непрерывна по переменной* x, $u(y) \in L_2(\Omega)$. *Тогда для модуля непрерывности функции* $v(x)$ *верна следующая оценка:*

$$\omega(v; \delta)_2 \leqslant c_4\{\omega_x(h; \delta) + \delta^{n-\alpha}\} \cdot \|u\|_2, \ 0 < \alpha < n, \ \delta \leqslant \operatorname{diam} \Omega. \tag{4}$$

Следует отметить, что оценки (3) и (4) в одномерном случае, т.е. при $n = 1$, известны (см., напр., [3, 4]). Из этих оценок вытекает, в частности, гельдеровость функции $v(x)$ с определенным показателем, если функция $h(x, y)$ является гельдеровой по внешней переменной x. Кроме того, теоремы 1 и 2 играют существенную роль при установлении скорости сходимости приближенных решений, найденных тем или иным прямым методом, к точному решению соответствующего интегрального уравнения с полярным ядром.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Госконтракт 02.740.11.0193).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. *Курс математической физики.* – М.: Наука, 1968. – 576 с.

2. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1988. – 336 с.

3. Габдулхаев Б. Г., Душков П. Н. *О полигональном методе решения интегральных уравнений* // Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. – С. 37–57.

4. Агачев Ю. Р. *Сходимость метода подобластей и одного "смешанного" метода для интегральных и дифференциальных уравнений* // Казанск. ун-т. – 48 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.12.1986. – № 9039-В86.

Ю. Р. Агачев, А. И. Леонов, И. П. Семенов, И. Н. Тихонов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

jagachev@ksu.ru

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА КВАДРАТУР РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

Рассматривается интегральное уравнение

$$Kx \equiv x(t) + \int_{-1}^{+1} \mu(s)h(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

где $\mu \in L_1(-1,1), h(t,s), y(t)$ – известные функции, $x(t)$ – искомая. Интегральное слагаемое в уравнении (1) задает оператор, который обозначим через H.